© Обуховский В.В., Гетманова Е.Н., Карпов М.Г., 2019
DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-112-118
УДК 517.988

О случайных точках равновесия

Валерий Владимирович ОБУХОВСКИЙ, Екатерина Николаевна ГЕТМАНОВА, Михаил Георгиевич КАРПОВ
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
392000, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3667-7569, e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2739-5706, e-mail: karpovmg57@yandex.ru

On random equilibrium points

Valeri V. OBUKHOVSKII, Ekaterina N. GETMANOVA, Michael G. KARPOV
Voronezh State Pedagogical University
86 Lenina St., Voronezh 394043, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3667-7569, e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2739-5706, e-mail: karpovmg57@yandex.ru

Аннотация. В работе доказывается вероятностная версия теоремы о точке равновесия для двух параметризованных многозначных отображений, удовлетворяющих совместным условиям типа Каристи.

Ключевые слова: случайная точка равновесия; случайная неподвижная точка; теорема Каристи; случайное многозначное отображение; измеримое многозначное отображение; каратеодориевское многозначное отображение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части госзадания (проект № 1.3464.2017/4.6).

Для цитирования: *Обуховский В. В., Гетманова Е. Н., Карпов М. Г.* О случайных точках равновесия // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 112–118. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-112-118

Abstract. We present a random version of a theorem on equilibrium points for two parametrized multivalued maps satisfying a joint Caristi type condition.

Keywords: random equilibrium point; random fixed point; Caristi's theorem; random multivalued map; measurable multivalued map; Carathéodory multivalued map

Acknowledgements: The work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the project part of the state work quota (project no. 1.3464.2017/4.6).

For citation: Obukhovskii V. V., Getmanova E. N., Karpov M. G. O sluchainykh tochkakh ravnovesiya [On Random Equilibrium Points]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 112–118. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-112-118 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теорема Каристи [1] — одно из известных в нелинейном анализе утверждений о неподвижной точке, нашедшее целый ряд обобщений и приложений (см., например, [2]–[5] и др.) В настоящей работе представлена случайная версия теоремы о существовании точек равновесия для двух параметризованных мультиотображений (многозначных отображений), удовлетворяющих совместным условиям типа Каристи.

1. Предварительные сведения. Некоторые понятия из теории многозначных отображений

Напомним некоторые сведения из многозначного анализа (подробности можно найти, например, в [3], [6]–[7]).

Пусть X и Y — метрические пространства. Символами $C(Y)$ $[K(Y)]$ будем обозначать совокупности всех непустых замкнутых [соответственно, компактных] подмножеств Y. Если Y — нормированное подмножество, символы $Cv(Y)$ $[Kv(Y)]$ обозначают совокупности всех непустых выпуклых замкнутых [соответственно, компактных] подмножеств Y.

О п р е д е л е н и е 1. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to C(Y)$ называют *полунепрерывным сверху* (*п.н.св.*) [*полунепрерывным снизу* (*п.н.сн.*)], если для каждого открытого [соответственно, замкнутого] множества $V \subset Y$

$$\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$$

открытое [соответственно, замкнутое] подмножество X.

О п р е д е л е н и е 2. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to C(Y)$ называется *непрерывным*, если оно полунепрерывно и сверху и снизу.

Пусть (Ω, Σ) измеримое пространство, т. е. Σ является σ-алгеброй подмножеств Ω.

О п р е д е л е н и е 3. Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \to C(Y)$ называется *измеримым*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) \in \Sigma$ для каждого открытого множества $V \subset Y$.

Всюду в дальнейшем, пусть (Ω, Σ, μ) — локально компактное метрическое пространство с мерой Радона μ и σ-алгеброй Σ μ-измеримых подмножеств.

Пусть X, Y — сепарабельные метрические пространства.

О п р е д е л е н и е 4. Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \to C(Y)$ называется *случайным u-мультиотображением* [*случайным l-мультиотображением*], если:

(i) $\mathcal{F}$ измеримо относительно минимальной σ-алгебры, порожденной $\Sigma \times B(X)$, где $B(X)$ — совокупность борелевских подмножеств X;

(ii) для любого $\omega \in \Omega$, мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \to C(Y)$ п.н.св. [соответственно, п.н.сн.]

Если мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \to C(Y)$ удовлетворяет условию (i) и условию

$(ii)'$ для любого $\omega \in \Omega$, мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \to C(Y)$ непрерывно,

то оно называется *случайным мультиотображением.*

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $A \subseteq X$ — замкнутое множество. Измеримое отображение $\xi \colon \Omega \to A$ называется *случайной неподвижной точкой мультиотображения* $\mathcal{F} \colon \Omega \times A \to C(X)$, если

$$\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$$

для всех $\omega \in \Omega$.

Лемма 1. *([7, Предложение 31.3]). Пусть $\mathcal{F} \colon \Omega \times A \to C(X)$ — случайное u-мультиотображение такое, что для каждого $\omega \in \Omega$ множество неподвижных точек*

$$Fix\mathcal{F}(\omega, \cdot) = \{x \in X : x \in \mathcal{F}(\omega, x)\}$$

непусто. Тогда $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

Прежде чем сформулировать следующее утверждение, приведем еще одно определение. Назовем функцию $\psi : \Omega \times X \to (-\infty, +\infty]$ *допустимой,* если для любого $\omega \in \Omega$ функция $\psi(\omega, \cdot)$ — собственная, т. е. ее значение конечно, по крайней мере, в одной точке, она ограничена снизу и полунепрерывна снизу.

Следующий результат является прямым следствием многозначной версии теоремы Каристи о неподвижной точке (см. [1], [2], [4]) и Леммы 1.

Теорема 1. *Пусть (X, d) — полное сепарабельное метрическое пространство и $\psi : \Omega \times X \to (-\infty, +\infty]$ — допустимая функция. Если $\mathcal{F} \colon \Omega \times X \to C(X)$ — случайное u-мультиотображение такое, что для любых $\omega \in \Omega$ и $x \in X$ существует $f \in \mathcal{F}(\omega, x)$ такое, что*

$$\psi(\omega, f) + d(x, f) \leq \psi(\omega, x),$$

то $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

О п р е д е л е н и е 6. Отображение $f \colon \Omega \times X \to Y$ называется каратеодориевским, если: (i) для каждого $\omega \in \Omega$ отображение $f(\omega, \cdot) \colon X \to Y$ непрерывно; (ii) для каждого $x \in X$ отображение $f(\cdot, x) \colon \Omega \to Y$ измеримо.

Аналогично, $\mathcal{F}\colon \Omega\times X \to K(Y)$ называется каратеодориевским мультиотображением, если: (i) мультиотображение $\mathcal{F}(\omega,\cdot)\colon X \to K(Y)$ непрерывно для любого $\omega\in\Omega$; (ii) мультиотображение $\mathcal{F}(\cdot,x)\colon \Omega \to K(Y)$ измеримо для каждого $x\in X$.
Отметим следующие свойства каратеодориевских мультиотображений (см. [3, Предложения 7.9 и 7.16]).

Лемма 2. *Если $\mathcal{F}\colon \Omega\times X \to K(Y)$ каратеодориевское мультиотображение, то*

(i) *$\mathcal{F}$ измеримо;*

(ii) *если пространство X полно, то для любого $\varepsilon>0$ существует замкнутое подмножество $\Omega_\varepsilon\subseteq\Omega$ такое, что $\mu(\Omega\setminus\Omega_\varepsilon)<\varepsilon$ и сужение $\mathcal{F}\,|_{\Omega_\varepsilon\times X}$ непрерывно.*

Справедлив следующий параметрический аналог теоремы Майкла о непрерывном сечении (см. [3, Теорема 7.23]).

Лемма 3. *Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство; Y — сепарабельное банахово пространство; $\mathcal{F}\colon \Omega\times X \to Cv(Y)$ — l-случайное мультиотображение. Тогда $\mathcal{F}$ допускает каратеодориевское сечение, т. е. существует каратеодориевское отображение $f\colon \Omega\times X\to Y$ такое, что*

$$f(\omega,x)\in\mathcal{F}(\omega,x),\quad \forall(\omega,x)\in\Omega\times X.$$

2. Основной результат

Теорема 2. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство; (Y,d) полное сепарабельное метрическое пространство; $F\colon\Omega\times X\to K(Y)$ — каратеодориевское мультиотображение и $G\colon\Omega\times Y\to Cv(X)$ — случайное l-мультиотображение. Пусть $\psi\colon\Omega\times Y\to(-\infty,+\infty]$ — допустимая функция такая, что для каждых $\omega\in\Omega$ и $x\in X$ найдется $f\in F(\omega,x)$ такое, что для любого $y\in Y$, удовлетворяющего*

$$x\in G(\omega,y),$$

выполнено

$$\psi(\omega,y)+d(y,f)\le\psi(\omega,y).$$

Тогда существуют измеримые отображения $x_\star\colon\Omega\to X$ и $y_\star\colon\Omega\to Y$ такие, что

$$\begin{cases} x_\star(\omega)\in G(\omega,y_\star(\omega)),\\ y_\star(\omega)\in F(\omega,x_\star(\omega))\end{cases}$$

для всех $\omega\in\Omega$.

Доказательство. Согласно Лемме 3, найдется каратеодориевское сечение $g\colon \Omega\times Y\to X$ мультиотображения G:

$$g(\omega,y)\in G(\omega,y),\quad \forall(\omega,y)\in\Omega\times Y.$$

Рассмотрим мультиотображение $\widetilde{F}\colon \Omega\times Y\to K(Y)$, определенное равенством

$$\widetilde{F}(\omega,y)=F(\omega,g(\omega,y)).$$

Покажем, что мультиотображение $\widetilde{F}$ удовлетворяет условию Теоремы 1. Во-первых, установим, что $\widetilde{F}$ является каратеодориевским мультиотображением. В самом деле, непрерывность мультиотображения $\widetilde{F}(\omega,\cdot)$ для любого $\omega\in\Omega$ вытекает из свойств непрерывности мультиотображений (см., например, [3], [6], [7]). Далее, применяя Лемму 2 (ii), для данного $\varepsilon>0$ возьмем замкнутое подмножество $\Omega_\varepsilon\subseteq\Omega$ такое, что $\mu(\Omega\setminus\Omega_\varepsilon)<\varepsilon$ и сужения F и g на $\Omega_\varepsilon\times Y$ являются непрерывными. Но тогда $\widetilde{F}$ также непрерывно на $\Omega_\varepsilon\times Y$ и, следовательно, $\widetilde{F}(\cdot,y)$ непрерывно на Ω_ε для каждого $y\in Y$. Это означает, что мультиотображения $\widetilde{F}(\cdot,y)$ удовлетворяют C-свойству Лузина для каждого $y\in Y$ и, следовательно (см. [7, Теорема 19.6]), они измеримы.

Согласно Лемме 2 (i) мультиотображение $\widetilde{F}$ измеримо, следовательно, это случайное мультиотображение.

Теперь возьмем произвольные $\omega\in\Omega$ и $y\in Y$. По условию теоремы существует $f\in\widetilde{F}(\omega,y)=F(\omega,g(\omega,y))$ такое, что

$$\psi(\omega,f)+d(y,f)\le\psi(\omega,y).$$

По Теореме 1, мультиотображение $\widetilde{F}$ имеет случайную неподвижную точку $y_\star\colon\Omega\to Y$, т. е.

$$y_\star(\omega)\in\widetilde{F}(\omega,y_\star(\omega))=F(\omega,g(\omega,y_\star(\omega))).$$

Ясно, что отображение $g(\omega,y_\star(\omega))$ измеримо и, следовательно, оно может быть взято в качестве искомого отображения $x_\star(\omega)$. □

Список литературы

[1] J. Caristi, "Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.

[2] Ж.-П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, М., 1988.

[3] S. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis*. V. 1: *Theory*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[4] N. Mizoguchi, W. Takahashi, "Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **141** (1989), 177–188.

[5] A. Petrusel, G. Mot, *Multivalued Analysis and Mathematical Economics*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2004.

[6] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2-е изд., ЛИБРОКОМ, М., 2011.

[7] L. Górniewicz, *Topological Fixed Point Theory and Its Applications*, V. 4: *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*, 2-nd ed., Springer, Dordrecht, 2006.

References

[1] J. Caristi, "Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.

[2] J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria. An Introduction to Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[3] S. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis.* V. 1: *Theory*, Kluwer, Dordrecht, 1997.

[4] N. Mizoguchi, W. Takahashi, "Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **141** (1989), 177–188.

[5] A. Petrusel, G. Mot, *Multivalued Analysis and Mathematical Economics*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2004.

[6] Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis and V. V. Obukhovskii, *Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions*, Librokom, Moscow, 2011 (In Russian).

[7] L. Górniewicz, *Topological Fixed Point Theory and Its Applications*, V. 4: *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*, Springer, Dordrecht, 2006.

Информация об авторах

Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739

Гетманова Екатерина Николаевна, аспирант, кафедра высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3667-7569

Карпов Михаил Георгиевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: karpovmg57@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2739-5706

Information about the authors

Valeri V. Obukhovskii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739

Ekaterina N. Getmanova, Post-Graduate Student, Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3667-7569

Michael G. Karpov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: karpovmg57@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2739-5706

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Обуховский Валерий Владимирович
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Поступила в редакцию 16.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 27.02.2019 г.
Принята к публикации 28.03.2019 г.

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Valeri V. Obukhovskii
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Received 16 January 2019
Reviewed 27 February 2019
Accepted for press 28 March 2019